

LBRIS
Luciana Lupaş

We know
books

Alexandru Lupaş

**PROBLEME
DE
ALGEBRĂ**

- calcul matriceal -

EDITURA GIL

Cuprins

1 ENUNȚURI	5
1.1 Matrice	5
1.1.1 Transformări liniare în plan	6
1.1.2 Operații cu matrice	8
1.1.3 Matrice particulare	11
1.1.4 Urma unei matrice	12
1.1.5 Șiruri recurente și matrice	13
1.2 Determinanți	15
1.2.1 Determinanți de ordin superior	17
1.2.2 Determinanți de tip Vandermonde	19
1.2.3 Principiul condensării	26
1.2.4 Metoda asemănării	28
1.2.5 Reprezentări ale polinoamelor	30
1.3 Probleme diverse	32
1.4 Aplicații în Algebra vectorială	32
1.5 Valori și vectori proprii	34
1.6 Ridicarea la putere a matricelor	38
1.6.1 Matrice 2×2	38
1.6.2 Ridicarea la putere a matricilor 3×3	43
1.6.3 Funcții de matrici	47
1.7 Rangul unei matrice	49
1.7.1 Transformări elementare	51
1.8 Matricea inversă	53
1.9 Sisteme de ecuații liniare	56
1.10 Ecuații matriceale	60
1.11 Simbolul lui Kronecker	62
2 SOLUȚII	63
2.1 Bibliografie	160

Capitolul 1

ENUNȚURI

1.1 Matrice

P 1 Se consideră matricile¹

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Se cere :

i) dacă $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = O_2$, arătați că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad ;$$

ii) oricare ar fi o matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ să se arate că există un singur sistem (a_1, a_2, a_3, a_4) de numere complexe astfel încât

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + a_4 E_4 \quad ;$$

iii) reprezentați matricea $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ca și o combinație liniară de

$$E_1, E_2, E_3, E_4 \quad .$$

P 2 Pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ se notează prin $\mathbf{E}_{kl} = \|a_{ij}\|$ matricea din $M_{n,m}(\mathbb{C})$ în care elementul situat pe linia k și pe coloana l este egal cu 1, toate celelalte elemente ale matricei fiind egale cu zero.

¹Termenul de matrice a fost introdus de matematicianul englez James Joseph Sylvester (1814-1897) în lucrarea *On a New Class of Theorems* publicată în 1850.

a) Care este elementul general a_{ij} ?

b) Dacă

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{kl} \mathbf{E}_{kl} = O_{n,m} \quad , \quad c_{kl} \in \mathbb{C} ,$$

demonstrați că $c_{kl} = 0$, $\forall k, n, 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$.

c) Arătați că oricare ar fi matricea A din $M_{m,n}(\mathbb{C})$ există un singur sistem de $n \cdot m$ numere complexe α_{kl} , astfel încât

$$A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} \mathbf{E}_{kl} .$$

1.1.1 Transformări liniare în plan

Pentru comoditate, când se utilizează calculul matricial în geometria plană, un punct \mathbf{x} de coordonate (x_1, x_2) se va reprezenta printr-un vector coloană $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Vom considera transformări $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$, unde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ,$$

sau

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} .$$

Cu alte cuvinte, imaginea punctului (x_1, x_2) prin transformarea definită de matricea A este punctul

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2) .$$

Matricea A se mai spune că este matricea transformării (1.1).

P 3 Fie $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ o transformare în plan. Se cere să se determine matricea A , cunoscând că transformarea este :

- Simetria în raport cu axa Ox_1 ;
- Simetria în raport cu originea O ;
- Rotația de unghi α , $\alpha \in [0, 2\pi)$
- Proiecția ortogonală pe axa Ox_1 .

Fie $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, vezi (1.1). Un punct \mathbf{x} care rămâne nemodificat în urma acestei transformări se numește invariant. Cu alte cuvinte, (x_1, x_2) este invariant față de transformarea definită de o matrice A dacă și numai dacă

$$(1.2) \quad \mathbf{x} = A\mathbf{x} .$$

Mulțimea tuturor punctelor x pentru care are loc (1.2) se numește mulțimea invariantă a transformării $y \rightarrow Ax$ și o vom nota cu $\mathcal{I}(A)$.

P 4 Demonstrați afirmațiile :

- $\mathcal{I}(A)$ nu este o mulțime vidă .
- $x_1, x_2 \in \mathcal{I}(A)$, $p, q \in \mathbb{R} \implies p \cdot x_1 + q \cdot x_2 \in \mathcal{I}(A)$.

P 5 Determinați mulțimile invariante ale următoarelor transformări din plan :

- Simetria în raport cu axa Ox_1 ;
- Simetria în raport cu originea O ;
- rotația de unghi α , $\alpha \in [0, 2\pi)$.
- Proiecția ortogonală pe axa Ox_1 .

Se constată că toate transformările $x \rightarrow Ax$ de forma (1.1) au cel puțin un punct invariant, anume originea O .

Fie $(x_1, x_2) \neq O$ deci $x \neq 0 = O_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Este interesant de a găsi acele puncte x cu proprietatea că imaginile lor se află pe dreapta (Ox) , determinată de punctele x și de originea O . Aceasta înseamnă că Ax trebuie să fie de forma λx unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cu alte cuvinte apare următoarea problemă : să se studieze existența punctelor x cu proprietatea

$$(1.3) \quad \begin{cases} 1) & x \neq 0 \\ 2) & Ax = \lambda x \end{cases}$$

Este clar că dacă x verifică (1.3), atunci pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ punctele αx satisfac de asemenea (1.3).

Acesta este unul dintre motivele pentru care dacă x este un punct cu proprietatea (1.3) , (Ox) se spune că este o dreaptă invariantă față de transformarea (1.1).

De asemenea , se spune că x cu proprietățile (1.3) este un vector propriu al transformării $x \rightarrow Ax$, sau al matricii A .

Dacă λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, are proprietatea că există $x \in M_{2,1}(\mathbb{C})$ astfel ca (1.3) să aibă loc , atunci se spune că λ este o valoare proprie a matricii A .

În concluzie , mulțimea

$$\{x \neq 0 \mid Ax = \lambda_1 x\} \quad , \quad \lambda_1 \in \mathbb{C}$$

se numește vectorul propriu atașat valorii proprii λ_1 .

Noțiunile de mai sus se extind în cazul transformărilor $x \rightarrow Ax$ unde $A \in M_n(\mathbb{C})$ iar $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Capitolul 2

SOLUȚII

SP.1 ¹ i) Avem $\sum_{k=1}^4 \alpha_k E_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_4 & \alpha_3 + i\alpha_2 \\ -\alpha_3 + i\alpha_2 & \alpha_1 + i\alpha_4 \end{pmatrix}$ ceea ce implică

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. ii) Presupunând prin absurd că ar exista un sistem $(b_1, b_2, b_3, b_4) \neq (a_1, a_2, a_3, a_4)$ (de exemplu $b_1 \neq a_1$) astfel încât $A = b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3 + b_4 E_4$ găsim $(b_1 - a_1)E_1 + (b_2 - a_2)E_2 + (b_3 - a_3)E_3 + (b_4 - a_4)E_4 = O_2$ cu $b_1 - a_1 \neq 0$. Dar aceasta contrazice proprietatea enunțată la punctul i). Se verifică cu ușurință că dacă

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci

$$(2.1) \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) = \left(\frac{a+d}{2}, -\frac{i(b+c)}{2}, \frac{b-c}{2}, \frac{i(a-d)}{2} \right)$$

iii) Din 2.1, în cazul matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, obținem

$$A = \frac{3}{2}E_1 - 5iE_2 + 2E_3 + \frac{i}{2}E_4$$

SP.2 a) $a_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. b) Este suficient să observăm că

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{kl} \mathbf{E}_{kl} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

¹SP.xy = Soluția (răspunsul) corespunzătoare problemei P.xy

SP.3 a) Trebuie ca imaginea unui punct (x_1, x_2) să fie punctul $(x_1, -x_2)$, adică

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Impunând această condiție se obține

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{matricea simetriei în raport cu axa } Ox_1.$$

b) Condiția este ca

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Găsim

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{matricea simetriei în raport cu originea } O.$$

c) Din

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{pmatrix}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

se deduce

$$A = A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \text{matricea de rotație cu unghiul } \alpha.$$

d) Din $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ concludem cu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{proiecția ortogonală pe } Ox_1, \text{ paralelă cu } Ox_2.$$

SP.4 a) $O = (0, 0) \in \mathcal{I}(A)$. b) Avem $\mathbf{x}_1 = \mathbf{Ax}_1$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{Ax}_2$ și fie $\mathbf{v} = p \cdot \mathbf{x}_1 + q \cdot \mathbf{x}_2$. Atunci

$$A\mathbf{v} = p \cdot A\mathbf{x}_1 + q \cdot A\mathbf{x}_2 = \mathbf{v} \implies \mathbf{v} \in \mathcal{I}(A).$$

SP.5 a) și d) : axa $Ox_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$, b)-c) $\mathcal{I} = \{O\}$.

SP.6 Să presupunem că ar exista $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$(*) \quad A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

În acest caz $\mu := \mathbf{x}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \neq 0$. Deoarece $A = A^T$, $\bar{A} = A$, din (*), prin transpunere respectiv conjugare găsim

$$\mathbf{x}^T A = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}^T \quad , \quad A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\mathbf{x}}.$$

Înmulțind la dreapta prima egalitate cu $\bar{\mathbf{x}}$, obținem

$$\mathbf{x}^T (A\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x} \implies \bar{\lambda}_1 \mu = \lambda_1 \mu ,$$

adică $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$ sau $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Generalizarea la cazul $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ este imediată.

SP.7 Determinăm valorile proprii, deci numerele λ pentru care sistemul $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ admite soluții nenule \mathbf{x} . Deoarece sistemul se poate scrie sub forma $(A - \lambda I_2)\mathbf{x} = 0$, rezultă că trebuie să avem

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + \delta = 0 \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

unde $\delta = \det(A) = ad - b^2$.

Discriminantul ecuației în λ este $\Delta := (a - d)^2 + 4b^2$.

Cazul I: $a = d \neq 0$ și $b = 0$, deci $A = a \cdot I_2$. Atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ și orice $\mathbf{x} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ este un vector propriu. Cu alte cuvinte, orice dreaptă care trece prin origine este invariantă.

Cazul II: $\Delta = (a - d)^2 + 4b^2 > 0$. Atunci valorile proprii sunt

$$\lambda_1 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Vectorii proprii corespunzători lui λ_j sunt

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} \xi \\ m_j \xi \end{pmatrix} \quad \text{dacă} \quad b \neq 0 \quad , \quad m_j = \frac{\lambda_j - a}{b} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{dacă} \quad b = 0 \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Înseamnă că în cazul $\Delta > 0$ dreptele invariante sunt: $x_2 = m_j \cdot x_1$ dacă $b \neq 0$. În cazul $b = 0$, axa verticală de ecuație $x_1 = 0$ este o dreaptă invariantă.